Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ 24.10.2016

Συνεχίζοντας με «τοπολογικές» ιδιότητες του $\mathbb{R}^n$
(τις οποίες θα χρειαστούμε για τη μελέτη συναρτήσεων
$f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}$)

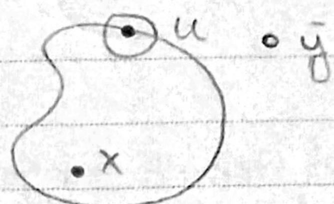
U ανοικτό $\Leftrightarrow \forall \bar{x} \in U \ \exists\, \epsilon > 0$ $B(\bar{x}, \epsilon) \subset U$

U κλειστό $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus U$ ανοικτό

__Ορισμός:__

Έστω $U \in \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\underline{\bar{x} \in \mathbb{R}^n}$ λέγεται:

α) εσωτερικό σημείο του $U \Leftrightarrow$
$\exists\, \epsilon > 0$ $B(\bar{x}, \epsilon) \subset U$



β) εξωτερικό σημείο του $U \Leftrightarrow$
εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}^n \setminus U$

γ) συνοριακό σημείο του $U \Leftrightarrow$
δεν είναι ούτε εσωτερικό, ούτε εξωτερικό.

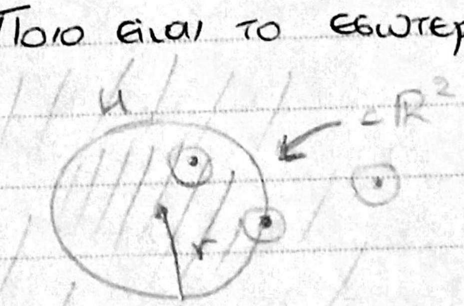
($\bar{x} \to$ εσωτ. / $\bar{y} \to$ εξωτ.
$U \to$ συν)

__Ορισμός__

Έστω $U \in \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\underline{\bar{x} \in \mathbb{R}^n}$ λέγεται σύνολο
εσωτερικών / εξωτερικών / συνοριακών σημείων του U = εσωτερικό / εξωτερικό / συνοριακό του U = $\text{int}\, U = \mathring{U}$ / $\text{ext}\, U$ / $\partial U (= \text{bd}\, U)$

__Παράδειγμα__

→ Ποιο είναι το εσωτερικό $\mathring{U}$ της σφαίρας $U = \partial B(\bar{x}, r) =$
$= \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n, \|\bar{x} - \bar{y}\| = r\}$

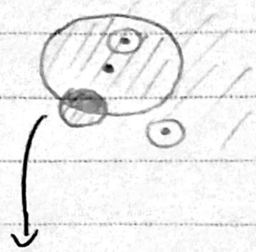


$\mathring{U} = \emptyset$

$\text{ext}\, U = \mathbb{R}^n \setminus U$

$\partial U =$

→ Ποιο είναι το εσωτερικό, εξωτερικό σύνορο των $\overbrace{B(\bar{x}, r)}^{=V} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| < r\}, r > 0$



$\bar{V} = V = B(\bar{x}, r)$

$\text{ext}\, V = \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\bar{x}, r)$

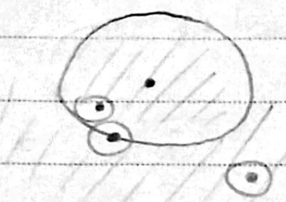
$\partial V = \partial B(\bar{x}, r)$

Δεν είναι ούτε εσωτερικό, ούτε εξωτερικό.

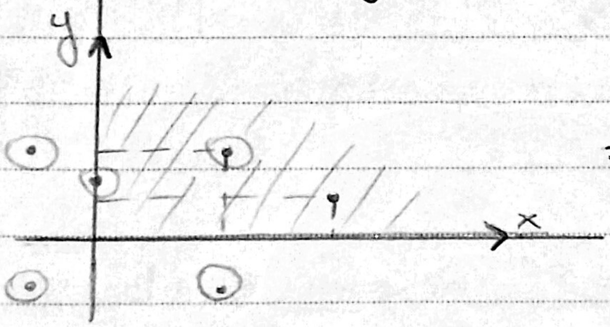
→ Ποιο είναι το εσωτερικό $\text{int}\, \bar{B}(\bar{x}, r) = B(\bar{x}, r)$

$\text{ext}\, \bar{B}(\bar{x}, r) = \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\bar{x}, r)$

$\text{bd}\, \bar{B}(\bar{x}, r) = \partial B(\bar{x}, r)$

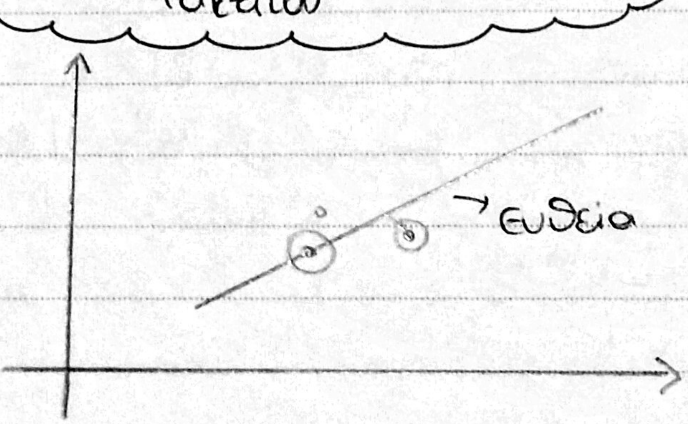


Εσωτερικό, εξωτερικό και σύνορο → $U = (0, \infty) \cup (0, \infty)$



$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x > 0 \land y > 0\}$

αποδ → παίρνεις ένα σημείο
με τις μικρότερες αποστάσεις
(ακτίνα)

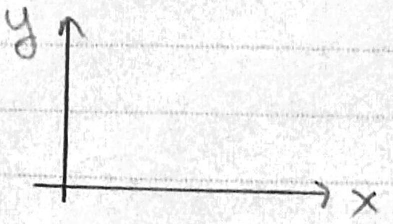


Έστω η ευθεία του $\mathbb{R}^2$

$\mathring{\Omega} = \emptyset$

$\text{ext}\, \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$

$\partial \Omega = \Omega$



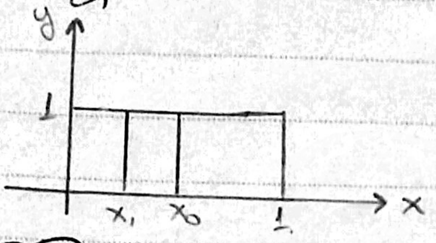
int εσωτερικό

$U=[0,1]$

$x\notin[0,1]$

ΘΕΜΑ 1

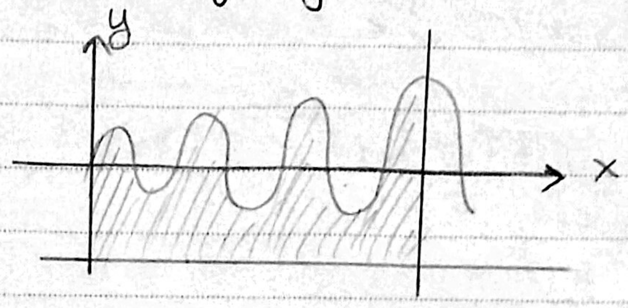
Ζωγράφισε το $U=[0,1]\times[0,1]$



$U=[0,1]\times[0,1] = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1],\ y\in[0,1]\}$

$\partial U = \{(x,0) : x\in[0,1]\}$
$\cup\{(x,1) : x\in[0,1]\}$
$\cup\{(0,y) : y\in[0,1]\}\cup\{(1,y) : y\in[0,1]\}$

$A\times B = \{(x,y) : x\in A,\ y\in B\}$



$\partial U = [0,1]\times\{0\}$
$\cup[0,1]\times\{1\}$
$\cup\{0\}\times[0,1]$
$\cup\{1\}\times[0,1]$

Πρόταση

Έστω $U\subseteq\mathbb{R}^n$. Τότε:

α) $\text{int}\,U\subseteq U$

β) $\text{int}\,U$ ανοικτό

γ) U ανοικτό $\Leftrightarrow$ $U=\text{int}\,U$

δ) $U\subset V \Rightarrow \text{int}\,U\subset\text{int}\,V$

ε) $\text{ext}\,U\subset\mathbb{R}^n\setminus U$

απόδειξη

(α) Έστω $\bar{x}\in\text{int}\,U \xrightarrow{\text{ορισμ.}} \exists\,\varepsilon$ το $\overbrace{B(\bar{x},\varepsilon)}^{\ni\bar{x}}\subset U \Rightarrow \bar{x}\in U$

(β) Έστω $\bar{x}\in\text{int}\,U$

ΘΔΟ: $\exists\,\delta>0 : B(\bar{x},\delta)\subset\text{int}\,U$

Ισχύει $\exists\,\varepsilon$ το $B(\bar{x},\varepsilon)\subset U$, όμως $B(\bar{x},\varepsilon)$ ανοικτό $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\,\bar{y}\in B(\bar{x},\varepsilon)\ \exists\,\varepsilon(\bar{y})>0$

$B(\bar{y},\varepsilon(\bar{y}))\subset B(\bar{x},\varepsilon)$

$\Rightarrow \forall\,\bar{y}\in B(\bar{x},\varepsilon) : \bar{y}\in\text{int}\,U$

$\Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \text{int}\, U$

Άρα για $\delta = \varepsilon$ κάναμε δουλειά

(γ) ($\Rightarrow$) Έχουμε ότι το (α) $\text{int}\, U \subset U$

Θδο $U \subset \text{int}\, U$

Έχω U ανοικτό δηλ. $\forall \bar{x} \in U$ $\exists$ στο $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$

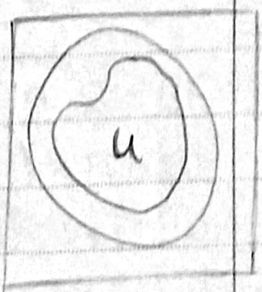
$\Rightarrow \forall \bar{x} \in U: \bar{x} \in \text{int}\, U$

$\Rightarrow U \subset \text{int}\, U$

($\Leftarrow$) (β)

(δ) Έστω $\bar{x} \in \text{int}\, U$

$\Leftrightarrow \varepsilon > 0$ $B(\bar{x}, \varepsilon) \in U \in V \rightarrow \bar{x} \in \text{int} V$



(ε) $\text{ext}\, U = \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus U) \overset{(\alpha)}{\subset} \mathbb{R}^n \setminus U$

<u>Ορισμός</u>

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το U ονομάζεται <u>κλειστή θήκη</u> του U και συμβολίζεται με $\bar{U}$

Συμβ. $\bar{U} = \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K$, $\mathcal{K} = \{ K \subset \mathbb{R}^n : K \text{ κλειστό} \wedge K \supset U \}$

<u>Πρόταση:</u>

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε :

α) $U \subset \bar{U}$

β) $\bar{U}$ κλειστό (V) *

γ) $U \subset K$, K κλειστό $\Rightarrow \bar{U} \subset K$

δ) U κλειστό $\Leftrightarrow U = \bar{U}$

* Τι είναι το (V)$^{(\alpha\kappa)}_j$

Αφού η τομή οσοδήποτε πολλών κλειστών συνόλων είναι κλειστή.

α) $\bar{x} \in U \Rightarrow \bar{x} \in K \quad \forall K \supset U$

$\Rightarrow \bar{x} \in K \quad \forall$ u κλειστό, $K \supset U$

$\Rightarrow \bar{x} \in K \quad \forall K \in \mathcal{K} \Rightarrow x \in \bigcap\limits_{K \in \mathcal{K}} K = \bar{U}$

γ) $\bar{U} = \bigcap\limits_{K \in \mathcal{K}} K \subset K_0 \quad \forall K_0 \in \mathcal{K}$

δ) $\Leftarrow$: (β) $\Rightarrow$: Έχουμε από το (α): $U \subset \bar{U}$

Θ.δ.ο. $U \supset \bar{U}$: (γ) (τέλος αποδ.)

Ορισμός

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται:

α) μεμονωμένο σημείο του $U \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) = \{\bar{x}\}$

β) σημείο συσσώρευσης του $U \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

γ) σημείο επαφής του $U \Leftrightarrow \bar{x} \in U \vee \bar{x}$ σ.σ. του U.

Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης ονομάζεται παράγωγο σύνολο του U, U'

Ασκηση

Ν.δ.ο. α) $\bar{x}$ μεμον. σημείο του $U \Rightarrow \bar{x} \in U \cap \partial U$

β) $\bar{x} \in U \Rightarrow \bar{x}$ μεμον. σημείο ή $\bar{x}$ σημ. συσσώρευσης.

γ) $\operatorname{int} U \subset U'$

δ) $\operatorname{ext} U \subset \mathbb{R}^n \setminus U'$

$\vdash\!\dashv$